EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….054**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 1 + i \sin 1$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2)$ la punctul $C(0,1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 25$ și dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(5, 2)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(4, 3)$ la dreapta $x + y = 3$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se verifice identitatea $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $M_2(\mathbf{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze AB şi BA.

(4p) **b)** Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB şi BA este aceeaşi.

(4p) **c)** Să se calculeze matricele $A+B$ şi $A-B$.

(2p) **d)** Să se arate că $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det(A)+\det(B))$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\det(A_1A_2...A_n)=\det(A_1)\det(A_2)...\det(A_n)$, $\forall A_1,...,A_n \in M_2(\mathbf{C})$ şi $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\det(A^n)=\det^n(A)$, $\forall A\in M_2(\mathbf{C})$ şi $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=1+x+x^2+...+x^6$ şi $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $(x-1)f(x)=x^7-1$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcţia F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se rezolve ecuaţia $F(x)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{7}$.

(2p) **g)** Să se arate că $F(x)<xf(x)$, $\forall x>0$.